МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУППАХ РАЗРЕШИМЫХ ТОТАЛЬНО ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, Минск

ON COMMUTATIVE SEMIGROUPS OF SOLUBLE TOTALLY ω-SATURATED FORMATIONS

V.G. Safonov, I.N. Safonova

Belarusian State University, Minsk

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая тотально (n-кратно) ω-насыщенная формация конечных групп $(n \geq 0)$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – тотально (n-кратно) ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{M}$. Тогда через $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$ $(A_n^\omega(\mathfrak{M}))$ обозначают полугруппу всех тотально (n-кратно) ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{M}$ с умножением заданным формулой $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$. Доказано, что разрешимая тотально (n-кратно) ω-насыщенная формация порождает коммутативную полугруппу тотально (n-кратно) ω-насыщенных подформаций тогда и только тогда, когда она нильпотентна. В частности, в классе разрешимых групп получено решение проблемы 6.26 из [1].

***Ключевые слова**: формация конечных групп, тотально ω-насыщенная формация, n-кратно ω-насыщенная формация, полугруппа формаций, коммутативная полугруппа формаций.*

Let $\mathfrak{M}$ be some totally (n-multiply) ω-saturated formation of finite groups $(n \geq 0)$, $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be totally (n-multiply) ω-saturated subformations of $\mathfrak{M}$. Then $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$ $(A_n^\omega(\mathfrak{M}))$ denotes the semigroup of all totally (n-multiply) ω-saturated subformations of $\mathfrak{M}$ with multiplication $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$. It is proved that a soluble totally (n-multiply) ω-saturated formation generates a commutative semigroup of totally (n-multiply) ω-saturated subformations if and only if, when it is nilpotent. In particular, the problem 6.26 from [1] is solved for the class of soluble groups.

***Keywords**: formation of finite groups, totally ω-saturated formation, n-multiply ω-saturated formation, semigroup of formations, commutative semigroup of formation.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения, принятые в [1]–[3].

А.И. Мальцевым в работе [4] было введено понятие произведения классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ алгебраических систем в некотором классе $\mathfrak{M}$ (мальцевское произведение классов) и обсуждалась задача о нахождении таких классов алгебраических систем $\mathfrak{M}$, для которых соответствующий частичный группоид является ассоциативным и коммутативным.

Задачи нахождения формаций (тотально насыщенных формаций) с коммутативными полугруппами подформаций (тотально насыщенных подформаций) были включены Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой в монографию [1] (проблемы 6.26 и 10.7). В случае формаций конечных групп мальцевское произведение классов задается формулой $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$.

Решение проблемы 10.7 было получено в работе [5], где, в частности, доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ – тотально насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *полугруппа $A_\infty(\mathfrak{M})$ коммутативна*;

2) *всякий элемент полугруппы $A_\infty(\mathfrak{M})$ является идемпотентом*;

3) *формация $\mathfrak{M}$ нильпотентена.*

В приведенной теореме $A_\infty(\mathfrak{M})$ обозначает полугруппу всех тотально насыщенных подформаций из $\mathfrak{M}$ с мальцевским умножением.

В данной статье, развивая результаты работы [5], получено описание разрешимых тотально ω-насыщенных (ω-композиционных) формаций с коммутативной полугруппой тотально ω-насыщенных (ω-композиционных) подформаций, а также разрешимых n-кратно ω-насыщенных (ω-композиционных) формаций с коммутативной полугруппой n-кратно ω-насыщенных (ω-композиционных) подформаций $(n \geq 0)$. В частности, в классе разрешимых групп получено решение проблемы 6.26 из [1].

1 Определения и обозначения

Пусть ω – непустое подмножество множества всех простых чисел. Символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd -группой (если таких подгрупп в G нет, то полагают $G_{\omega d}=1$). Всякую функцию вида

$$f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{\text{формации}\}$$

называют ω-локальным спутником. Через $LF_{\omega}(f)$ обозначают класс всех таких групп G, что $G/G_{\omega d}\in f(\omega')$ и $G/F_p(G)\in f(p)$ для любого $p\in\omega\cap\pi(G)$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f – ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/L\in\mathfrak{F}$, где $L\subseteq O_{\omega}(G)\cap\Phi(G)$. Как известно [3], формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда она ω-локальна.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n\geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f)$, где все значения ω-локального спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Формацию n-кратно ω-насыщенную для любого целого неотрицательного n называют тотально ω-насыщенной.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда через $l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают тотально ω-насыщенную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех тотально ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. При этом, если $\mathfrak{X}=\{G\}$, то формацию $l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}G$ называют однопорожденной тотально ω-насыщенной формацией. Множество l_{∞}^{ω} всех тотально ω-насыщенных формаций относительно включения $\subseteq$ образует полную модулярную решетку [6]. Формации из l_{∞}^{ω} называют l_{∞}^{ω}-формациями.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая l_{∞}^{ω}-формация, $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной тотально ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией ($\mathfrak{H}_{\infty}^{\omega}$-критической формацией), если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, но все ее собственные l_{∞}^{ω}-подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается наименьшая нормальная подгруппа группы G с факторгруппой в $\mathfrak{F}$. Произведением двух непустых формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ обозначают класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=(G\mid G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают $\mathfrak{X}(F_p)=\mathrm{form}(G/F_p(G)\mid G\in\mathfrak{X})$, если $p\in\pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(F_p)=\varnothing$, если $p\notin\pi(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – тотально ω-насыщенная формация. Тогда через $A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})$ обозначают полугруппу тотально ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{M}$. В частности, если $\mathfrak{M}=l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}G$, то

$$A_{\infty}^{\omega}(l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}G)=A_{\infty}^{\omega}(G).$$

2 Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 [7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ненильпотентная тотально ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_{\infty}^{\omega}$-критической формацией, когда $\mathfrak{F}=l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{N}}$, что либо $\pi=\pi(P)\cap\omega=\varnothing$, либо $\pi\neq\varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G=[P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G)=1$, где $P=C_G(P)$ – абелева p-группа, $p\in\omega$ и $|Q|=q$ – простое число*;

2) *P – неабелева pd -группа, $G/P\in\mathfrak{N}_p$, где $p\in\omega$, причем $\pi(G)\cap\omega=\{p\}$.*

Лемма 2.2 [3]. *Если $\mathfrak{F}=l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ и f – минимальный ω-локальный l_{∞}^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega')=l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G/G_{\omega d}\mid G\in\mathfrak{X})$;

2) $f(p)=l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p\in\omega$;

3) если $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(h)$, *спутник h l_{∞}^{ω}-значен и p – некоторое фиксированное число из ω, то $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f_1)$, где $f_1(a)=h(a)$ при любом $a\in(\omega\setminus\{p\})\cup\{\omega'\}$ и*

$$f_1(p)=l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G\mid G\in h(p)\cap\mathfrak{F},O_p(G)=1),$$

кроме того, $f_1(p)=f(p)$;

4) $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(h)$, *где $h(\omega')=\mathfrak{F}$ и $h(p)=f(p)$ при всех $p\in\omega$.*

Лемма 2.3 [2, с. 171]. *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G)=\{1\}$ (p – некоторое простое число*), *то существует точный неприводимый F_pG-модуль, где F_p – поле из p элементов.*

Лемма 2.4 [1]. *Если $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f)$ и*

$$G/O_p(G)\in\mathfrak{F}\cap f(p),$$

для некоторого $p\in\omega$, то $G\in\mathfrak{F}$.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ – ненильпотентная тотально ω-насыщенная формация. Тогда в $\mathfrak{M}$ содержится по меньшей мере одна минимальная* *тотально ω-насыщенная ненильпотентная формация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – ненильпотентная тотально ω-насыщенная формация. Выберем в $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{N}}$. Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form}G$. Если

$$\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing,$$

то в силу леммы 2.1 $\mathfrak{F}$ – искомая минимальная тотально ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть $\pi \neq \varnothing$ и $p \in \pi$. Допустим, что P – абелева p-группа. Поскольку $\mathfrak{N}$ – насыщенная формация, то $P \not\subset \Phi(G)$ и $P = C_G(P) = F_p(G)$. Ввиду леммы 2.2 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой минимальный ω-локальный l_∞^ω-значный спутник f, что $f(p) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / F_p(G)) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / P)$. Заметим, что $G / P \neq 1$, поскольку в противном случае G является p-группой и принадлежит $\mathfrak{N}$, что невозможно. Поэтому найдется по меньшей мере одно $q \in \pi(G / P) \setminus \{p\}$. Пусть Q – группа порядка q. Так как $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / P) \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ – наследственная формация, то силовская q-подгруппа группы G / P принадлежит $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / P)$. Значит, формации $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / P) = f(p)$ принадлежит и группа Q. Поскольку Q монолитическая группа и $O_p(Q) = 1$, то по лемме 2.3 существует точный неприводимый $\mathrm{F}_p Q$-модуль V, где F_p – поле из p элементов. Положим $A = [V]Q$. Тогда группа A является группой Шмидта с $\Phi(A) = 1$. Понятно, что $F_p(A) = O_p(A) = V$. Поскольку $A / F_p(A) \cong V \in f(p)$, то применяя лемму 2.4 получим $A \in \mathfrak{F}$. Тогда, ввиду леммы 2.1, $\mathfrak{L} = l_\infty^\omega \mathrm{form}A$ – искомая минимальная тотально ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь P – неабелева pd-группа, где $p \in \omega$. Допустим, что $|\pi| > 1$. Тогда в π существуют по крайней мере еще одно отличное от p простое число q. Понятно, что

$$F_p(G) = F_q(G) = 1.$$

В силу леммы 2.2 для минимального ω-локального l_∞^ω-значного спутника f формации $\mathfrak{F}$ имеем:

$$f(p) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / F_p(G)) = l_\infty^\omega \mathrm{form}G,$$

$$f(q) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / F_q(G)) = l_\infty^\omega \mathrm{form}G.$$

Пусть Z_p – группа простого порядка p. Поскольку $O_q(Z_p) = 1$, то ввиду леммы 2.3 существует точный неприводимый $\mathrm{F}_q Z_p$-модуль W, где F_q – поле из q элементов. Пусть $B = [W]Z_p$. Ясно, что $F_q(B) = O_q(B) = W$. Тогда, так как $B / F_q(B) \cong W \in f(q)$, то по лемме 2.4 группа $B \in \mathfrak{F}$. Но тогда в силу леммы 2.1 $l_\infty^\omega \mathrm{form}B$ – искомая минимальная тотально ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь $|\pi| = 1$. Если теперь $G / P \in \mathfrak{N}_p$, то ввиду леммы 2.1 $\mathfrak{F}$ – искомая минимальная тотально ω-насыщенная ненильпотентная формация. Пусть $\pi(G / P) \not\subset \{p\}$ и $q \in \pi(G / P) \setminus \{p\}$. Обозначим через Q группу простого порядка q. Поскольку формация $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / P)$ нильпотентна, то она наследственна. Поэтому силовская q-подгруппа группы G / P, а следовательно и группа Q, принадлежат формации

$$l_\infty^\omega \mathrm{form}(G / P) = f(p).$$

По лемме 2.3 существует точный неприводимый $\mathrm{F}_p Q$-модуль K, где F_p – поле из p элементов. Положим $M = [K]Q$. Тогда $F_p(M) = O_p(M) = K$. Поскольку $M / F_p(M) \cong K \in f(p)$, то по лемме 2.4 группа M принадлежит $\mathfrak{F}$. Но тогда по лемме 2.1 $\mathfrak{L} = l_\infty^\omega \mathrm{form}M$ – минимальная тотально ω-насыщенная ненильпотентная формация. Лемма доказана.

***Лемма* 2.6** [2, с. 94]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ – минимальная тотально локальная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ для некоторых различных простых чисел p, q.*

***Лемма* 2.7** [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщена*;

2) *$\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$*;

3) *$\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и*

$$f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$$

для всех $p \in \omega$;

4) *формация $\mathfrak{F}$ ω-локальна.*

***Лемма* 2.8.** *Пусть формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$, $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда формация $\mathfrak{F}$ ω-локальна и $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$,*

$$f(p) = m(p)\mathfrak{H} \text{ при } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$$

и $f(p) = h(p)$ при $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M})$.

***Лемма* 2.9.** *Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ – простое число, $q \notin \omega$. Тогда имеет место равенство*

$$l_\infty^\omega \mathrm{form}G = \mathfrak{N}_p \mathrm{form}Q.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=l_\infty^\omega\mathrm{form}G,$ где G группа из условия леммы. Обозначим через f – минимальный ω-локальный l_∞^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. В силу леммы 2.2 имеет место $f(p)=l_\infty^\omega\mathrm{form}(G/F_p(G)).$ Поскольку по условию леммы $P=C_G(P)$ – абелева p-группа, то $F_p(G)=P.$ Значит, $f(p)=l_\infty^\omega\mathrm{form}(G/P)=l_\infty^\omega\mathrm{form}Q.$ Так как при этом $|Q|=q$ – простое число, $q\notin\omega,$ то $l_\infty^\omega\mathrm{form}Q=\mathrm{form}Q.$ Тогда по лемме 2.7 имеем

$$\mathfrak{N}_pf(p)=\mathfrak{N}_p\mathrm{form}Q\subseteq\mathfrak{F}.$$

Заметим также, что в силу леммы 2.8 формация $\mathfrak{N}_p\mathrm{form}Q$ является тотально насыщенной формацией как произведения двух l_∞^ω-формаций $\mathfrak{N}_p$ и $\mathrm{form}Q.$ Так как при этом, очевидно, $G\in\mathfrak{N}_p\mathrm{form}Q,$ то $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p\mathrm{form}Q.$ Лемма доказана.

***Лемма* 2.10** [8]. *Если H/K – главный фактор группы G и $p\in\pi(H/K),$ то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G)\subseteq C_G(H/K).$*

***Лемма* 2.11** [7]. *Пусть G – такая монолитическая группа с цоколем $P=G^{\mathfrak{N}},$ что $\pi=\pi(P)\cap\omega=\varnothing.$ Тогда формация $\mathfrak{L}=l_\infty^\omega\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную l_∞^ω-подформацию $l_\infty^\omega\mathrm{form}(G/P)=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}.$*

***Лемма* 2.12.** *Пусть $\mathfrak{L}=l_\infty^\omega\mathrm{form}G,$*

$$\mathfrak{H}=l_\infty^\omega\mathrm{form}(G/P),$$

где G – такая монолитическая группа с цоколем $P=G^{\mathfrak{N}},$ что $\pi(P)\cap\omega=\varnothing$ и $G/P\neq1.$ Тогда $\mathfrak{L}\not\subset\mathfrak{L}\mathfrak{H}.$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ формации из условия леммы. В силу леммы 2.11 формация $\mathfrak{H}=l_\infty^\omega\mathrm{form}(G/P)$ является единственной максимальной l_∞^ω-подформацией формации $\mathfrak{L}=l_\infty^\omega\mathrm{form}G.$

Предположим, что $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{L}\mathfrak{H}.$ Тогда $G\in\mathfrak{L}\mathfrak{H}$ и $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{L}.$ Так как при этом $G/P\in\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}\not\subset\mathfrak{H},$ то $P=G^{\mathfrak{H}}.$ Значит, $P\in\mathfrak{L}.$

Допустим, что $l_\infty^\omega\mathrm{form}P=\mathfrak{L}.$ Тогда поскольку P – ω'-группа, то группа G также является ω'-группой. Поэтому

$$l_\infty^\omega\mathrm{form}P=\mathrm{form}P,$$

$$l_\infty^\omega\mathrm{form}G=\mathrm{form}G$$

и $\mathrm{form}G=\mathrm{form}P.$ Так как P – элементарная группа, а по условию леммы $G/P\neq1,$ то $G\notin\mathrm{form}P.$ Противоречие. Следовательно, $l_\infty^\omega\mathrm{form}P\subseteq l_\infty^\omega\mathrm{form}G.$ Поэтому $l_\infty^\omega\mathrm{form}P\subseteq\mathfrak{H}.$ Так как при этом $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N},$ то P – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Ввиду леммы 2.10 имеем $O_p(G/P)=1.$ Значит, $P\in\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}_{p'}.$ Снова получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и $\mathfrak{L}\not\subset\mathfrak{L}\mathfrak{H}.$ Лемма доказана.

***Лемма* 2.13** [8, с. 18]. *Любая подформация формации $\mathfrak{N}$ замкнута относительно подгрупп.*

***Лемма* 2.14** [1, с. 175]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация, когда $\mathfrak{F}=\mathrm{form}G,$ где G – одна из следующих групп:*

1) *ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом G, что $P\not\subset\Phi(G)$ и факторгруппа G/P абелева*;

2) *группа кватернионов порядка 8*;

3) *неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p.*

***Лемма* 2.15** [1, с. 167]. *Пусть A монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P\not\subset\Phi(G),$ то $\mathrm{form}(A/P)$ единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}A.$*

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая тотально ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда полугруппа $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$ коммутативна, когда $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}.$*

Доказательство. Необходимость. Пусть полугруппа $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$ коммутативна. Покажем, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}.$

Допустим, что $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{N},$ тогда по лемме 2.5 в формацию $\mathfrak{M}$ входит по меньшей мере одна минимальная тотально ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{L}$. В силу леммы 2.1 имеем $\mathfrak{L}=l_\infty^\omega\mathrm{form}G,$ где G – такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{N}},$ что либо $\pi=\pi(P)\cap\omega=\varnothing,$ либо $\pi\neq\varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $G=[P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G)=1,$ где $P=C_G(P)$ – абелева p-группа, $p\in\omega$ и $|Q|=q$ – простое число;

2) P – неабелева pd-группа, $G/P\in\mathfrak{N}_p,$ где $p\in\omega,$ причем $\pi(G)\cap\omega=\{p\}$.

Пусть $\pi(P)\cap\omega\neq\varnothing$. Поскольку по условию теоремы формация $\mathfrak{M}$ разрешима, то $G=[P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G)=1,$ где $P=C_G(P)$ – абелева p-группа, $p\in\omega$ и $|Q|=q$ – простое число.

Пусть $q\in\omega.$ Тогда поскольку $\pi(G)\subseteq\omega,$ то $l_\infty^\omega\mathrm{form}G=l_\infty\mathrm{form}G,$ т. е. $\mathfrak{L}$ – тотально насыщенная формация. Ввиду леммы 2.6 имеем $\mathfrak{L}=l_\infty\mathrm{form}G=\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q.$ Поскольку $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$ –

тотально ω-насыщенные формации из $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$ элементы полугруппы $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$. Следовательно, по условию теоремы имеет место равенство $\mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_p$. Так как

$$\mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \cap \mathfrak{M} \text{ и } \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M},$$

то $\mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$.

Если теперь $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, так как $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \not\subset \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \neq \mathfrak{N}_q \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}.$$

Противоречие. Поэтому $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Но тогда $\mathfrak{N}_q \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Снова получаем противоречие.

Следовательно, $q \notin \omega$. Тогда

$$l_\infty^\omega \mathrm{form}Q = \mathrm{form}Q$$

и в силу леммы 2.4 имеет место равенство

$$\mathfrak{L} = l_\infty^\omega \mathrm{form}G = \mathfrak{N}_p \mathrm{form}Q.$$

Поскольку $\mathrm{form}Q$ и $\mathfrak{N}_p$ – тотально ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{M}$, то по условию теоремы $\mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathrm{form}Q = \mathrm{form}Q \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_p$. Так как

$$G \in \mathfrak{N}_p \mathrm{form}Q \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathrm{form}Q,$$

то $G \in \mathrm{form}Q \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_p = \mathrm{form}Q\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M}$. Поэтому $G^{\mathfrak{N}_p} \in \mathrm{form}Q$. Поскольку при этом $G \notin \mathfrak{N}_p$, то $G^{\mathfrak{N}_p} \neq 1$. Значит, $P \subseteq G^{\mathfrak{N}_p} \in \mathrm{form}Q$. Противоречие. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_p \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathrm{form}Q \neq \mathrm{form}Q \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{N}_p.$$

Полученное противоречие показывает, что данный случай невозможен.

Пусть теперь $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$. Поскольку формация $\mathfrak{M}$ разрешима и $\Phi(G) = 1$, то $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \notin \omega$ и $G = [P]H$, где H – некоторая максимальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 2.10 имеем $O_p(H) = 1$.

По лемме 2.11 формация $\mathfrak{L} = l_\infty^\omega \mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную тотально ω-насыщенную подформацию $\mathfrak{H} = l_\infty^\omega \mathrm{form}H$. Тогда $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ элементы полугруппы $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$. Значит, $\mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{L}$.

Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{L}$. С другой стороны, по лемме 2.12 имеем $\mathfrak{L} \not\subset \mathfrak{L}\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{L} \not\subset \mathfrak{L}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} \neq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{L}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Покажем, что тогда полугруппа $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$ коммутативна.

Допустим противное. Тогда найдутся такие тотально ω-насыщенные подформации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} \neq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Пусть для определенности $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} \not\subset \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Выберем в $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$ группу G наименьшего порядка. Тогда G монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой $P = \mathrm{Soc}(G)$. Так как в силу леммы 2.13 всякая подформация нильпотентных групп наследственна, то формации $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ содержатся в произведении $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ и в произведении $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Поэтому $P \subseteq G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $P \subseteq G^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Кроме того, так как $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$ и имеет место $G^{\mathfrak{H}} \neq G$.

Применяя лемму 2.8 нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$\pi(\mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) \cap \omega.$$

Поскольку группа $G \in \mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$, то G является p-группой для некоторого простого числа $p \notin \omega$.

Допустим, что группа G абелева. Тогда G – циклическая группа. Пусть $|G| = p^n$ для некоторого натурального n. Поскольку $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Пусть $|G^{\mathfrak{H}}| = p^k$. Тогда поскольку $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$, то $0 < k < n$,

$$|G / G^{\mathfrak{H}}| = p^{n-k}, \ 0 < n-k < n.$$

Так как группа $G / G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, то формация $\mathfrak{H}$ содержит циклическую группу порядка p^{n-k}. Пусть H подгруппа группы G порядка p^{n-k}. Тогда H – нормальная циклическая подгруппа, $H \in \mathfrak{H}$ и $|G / H| = p^k$. Поскольку G / H – циклическая группа, то $G / H \simeq G^{\mathfrak{H}}$. Так как при этом $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$, то $G / H \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Но $H \in \mathfrak{H}$ и формация $\mathfrak{H}$ наследственна. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Но тогда $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Поэтому G – неабелева группа. Так как при этом формация $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ наследственна, то G – минимальная неабелева группа и

$$\mathfrak{L} = l_\infty^\omega \mathrm{form}G = \mathrm{form}G$$

– минимальная неабелева формация. В силу леммы 2.14 группа G является либо группой кватернионов порядка 8, либо неабелевой группой порядка p^3 простой нечетной экспоненты p.

Пусть $2 \notin \omega$ и G – группа кватернионов порядка 8. Тогда $G = AB$, где A и B – нормальные циклические подгруппы порядка 4, $A \cap B = Z(G)$ – группа порядка 2.

Поскольку $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $|G^{\mathfrak{H}}| = 2$ и $G^{\mathfrak{H}} = Z(G)$. Допустим, что $|G^{\mathfrak{H}}| = 4$. Тогда $|G / G^{\mathfrak{H}}| = 2$. Поскольку $|G / A| = 2$ и $|G / B| = 2$, то $G / A \in \mathfrak{H}$ и $G / B \in \mathfrak{H}$. Значит, $G / A \cap B = G / Z(G) \in \mathfrak{H}$. Поэтому $G^{\mathfrak{H}} \subseteq Z(G)$. Так как при этом группа $G \notin \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} = Z(G)$ и $|G^{\mathfrak{H}}| = 2$. Противоречие. Поэтому $G^{\mathfrak{H}} = Z(G)$ и $|G^{\mathfrak{H}}| = 2$.

Допустим теперь, что $|G^{\mathfrak{F}}| = 4$. Рассуждая аналогично, получим, что $|G^{\mathfrak{F}}| = 2$ и $G^{\mathfrak{F}} = Z(G)$. Но тогда поскольку $G / G^{\mathfrak{H}} = G / Z(G)$ – элементарная 2-группа, то $G^{\mathfrak{F}} = Z(G) \in \mathfrak{H}$. Последнее означает, что $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F}$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие.

Пусть теперь G – неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$. Тогда группа G представима в виде полупрямого произведения $[Z_p \times Z_p]Z_p$ элементарной абелевой группы $[Z_p \times Z_p]$ порядка p^2 и циклической группы Z_p порядка p. Понятно, что

$$G \in \mathrm{form}Z_p \mathrm{form}Z_p.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Так как при этом $P \subseteq G^{\mathfrak{H}} \neq G$ и $G / G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, то $\mathrm{form}Z_p \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathrm{form}Z_p \mathrm{form}Z_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Но тогда

$$G \in \mathrm{form}Z_p \mathrm{form}Z_p \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{F}.$$

Следовательно, $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы. В случае, когда $\omega = \{p\}$ из теоремы 3.1 получаем.

***Следствие* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая тотально p-насыщенная формация. Тогда и только тогда полугруппа $A_{\infty}^{p}(\mathfrak{M})$ коммутативна, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Если ω – множество всех простых чисел из теоремы 3.1 вытекает

***Следствие* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда полугруппа $A_{\infty}(\mathfrak{M})$ коммутативна, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Следствие* 3.3.** *Тогда и только тогда разрешимая группа G нильпотентна, когда полугруппа $A_{\infty}^{\omega}(G)$ коммутативна.*

Пусть $\mathfrak{M}$ – n-кратно ω-насыщенная формация, $n \geq 0$. Тогда через $A_n^{\omega}(\mathfrak{M})$ обозначают полугруппу n-кратно ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{M}$. В частности, если $\mathfrak{M} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$, то $A_n^{\omega}(l_n^{\omega}\mathrm{form}G) = A_n^{\omega}(G)$.

Аналогично теореме 3.1 доказывается

***Теорема* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая n-кратно ω-насыщенная формация, $n \geq 0$. Тогда и только тогда полугруппа $A_n^{\omega}(\mathfrak{M})$ n-кратно ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{M}$ коммутативна, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Следствие* 3.4.** *Тогда и только тогда разрешимая группа G нильпотентна, когда полугруппа $A_n^{\omega}(G)$ коммутативна, $n \geq 0$.*

Частным случаем теоремы 3.2 является следующая теорема, дающая ответ на вопрос 6.26 [1, с. 67] в классе разрешимых групп.

***Теорема* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая формация. Тогда и только тогда полугруппа $A_0(\mathfrak{M})$ подформаций из $\mathfrak{M}$ коммутативна, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая формация и полугруппа $A_0(\mathfrak{M})$ коммутативна. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ и выберем в $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$. Поскольку формация $\mathfrak{M}$ разрешима, то $P = G^{\mathfrak{N}}$ – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Ввиду насыщенности формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ имеем $\Phi(G) = 1$. Поэтому $G = [P]Q$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $Q \in \mathfrak{N}$. В силу леммы 2.10 имеет место $\mathrm{O}_p(Q) = 1$. Применяя лемму 2.15 получим, что формация $\mathfrak{L} = \mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную подформацию

$$\mathfrak{H} = \mathrm{form}(G / P) = \mathrm{form}Q.$$

Таким образом, $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ элементы полугруппы $A_0(\mathfrak{M})$. Следовательно, имеет место равенство $\mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{L}$.

Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, то, очевидно,

$$\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{L}.$$

Допустим, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{H}$. Тогда $G \in \mathfrak{L}\mathfrak{H}$ и $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{L}$. Так как $G / P \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L} \not\subset \mathfrak{H}$, то $P = G^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $P \in \mathfrak{L}$. Поскольку $Q \neq 1$ и $\mathrm{O}_p(Q) = 1$, то $\mathrm{form}G \neq \mathrm{form}P$. Поэтому

$$\mathrm{form}P \subset \mathrm{form}G.$$

Но $\mathfrak{H}$ единственная максимальная подформация формации $\mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathrm{form}P \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $P \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{L} \not\subset \mathfrak{L}\mathfrak{H}$. Поэтому

$$\mathfrak{L} \not\subset \mathfrak{L}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}.$$

Таким образом, $\mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H} \neq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{L}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Достаточность. Доказательство достаточности осуществляется аналогично доказательству достаточности теоремы 3.1.

***Замечание* 3.1.** Отметим, что условие разрешимости формации $\mathfrak{M}$ в теоремах 3.1–3.3 существенно.

Пусть $\mathfrak{M} = l_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}G$, $\mathfrak{F} = l_{n}^{\omega}\mathrm{form}G$, где G – простая неабелева группа, причем при $n \geq 1$ имеет место $|\pi(G) \cap \omega| \leq 1$. Тогда $\mathfrak{M}, \mathfrak{F} \not\subset \mathfrak{N}$. Однако, нетрудно показать, что полугруппы $A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})$ и $A_{n}^{\omega}(\mathfrak{F})$ коммутативны, поскольку $2 \leq |A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})| \leq 3$ и $2 \leq |A_{n}^{\omega}(\mathfrak{F})| \leq 3$.

***Замечание* 3.2.** Как известно, в классе всех разрешимых групп понятия ω-насыщенной и ω-композиционной формации совпадают (понятие ω-композиционной формации введено в работе [9]). Поэтому из теорем 3.1 и 3.2, соответственно, вытекают

***Следствие* 3.5.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая тотально ω-композиционная формация. Тогда и только тогда полугруппа $A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})$ тотально ω-композиционных подформаций из $\mathfrak{M}$ коммутативна, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Следствие* 3.6.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая n-кратно ω-композиционная формация, $n \geq 0$. Тогда и только тогда полугруппа $A_{n}^{\omega}(\mathfrak{M})$ n-кратно ω-композиционных подформаций из $\mathfrak{M}$ коммутативна, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Заключение

Полученное в данной работе описание разрешимых тотально (n-кратно) ω-насыщенных или ω-композиционных формаций с коммутативной полугруппой тотально (n-кратно) ω-насыщенных, соответственно, ω-композиционных подформаций позволяет классифицировать формации такого вида по свойствам полугруппы подформаций. Доказанные утверждения расширяют основные результаты работы [5] и дают новые примеры коммутативных полугрупп тотально (n-кратно) ω-насыщенных и ω-композиционных формаций. В частности, в классе всех разрешимых групп получено решения задачи об описании формаций с коммутативной полугруппой подформаций (проблема 6.26 [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
2. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. *Скиба*, *А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. *Мальцев*, *А.И.* Об умножении классов алгебраических систем / А.И. Мальцев // Сиб. матем. журнал. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 346–365.
5. *Сафонов*, *В.Г.* К теории тотально насыщенных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2008. – 34 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 15).
6. *Сафонов*, *В.Г.* О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2004. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 7).
7. *Сафонов*, *В.Г.* О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2014. – № 6 (84). – С. 9–15.
8. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
9. *Скиба*, *А.Н.* Кратно частично композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

Поступила в редакцию 26.10.15.